

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7.0 điểm).

Câu 1 (2.0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ ($m \neq 1$) (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.

b) Gọi A là giao điểm của đồ thị (C_m) với trục hoành còn B là điểm có hoành độ bằng 1 thuộc đồ thị của (C_m), k và k_1 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C_m) tại A và B. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|k+k_1|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (2.0 điểm). a) Giải phương trình $2\cos(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 1 - 2\cos^2(\frac{3\pi}{4} - x)$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases}$$

Câu 3 (1.0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x \cdot \sqrt{x} + x}{(x+1)e^x} dx$

Câu 4 (1.0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 2012xyz$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$

Câu 5 (1.0 điểm). Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC = a\sqrt{3}$, $DA = DB = DC$. Biết rằng DBC là tam giác vuông và điểm E nằm trên DA sao cho $\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$. Tính thể tích tứ diện EBCD theo a .

PHẦN RIÊNG (3.0 điểm). Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc phần B.

A. Theo chương trình nâng cao.

Câu 6a (1.0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có A(1;3); B(-1;1); C(3;0). Lập phương trình đường thẳng d biết d đi qua A và cùng với đường thẳng d' cũng đi qua A chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.

Câu 7a (1.0 điểm). Trong hệ trục Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng trung trực của MN biết rằng M thuộc d_1 còn N thuộc d_2 sao cho khoảng cách MN là ngắn nhất.

Câu 8a (1.0 điểm). Cho tập $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 7x \leq 0\}$ chọn ngẫu nhiên ra ba số từ tập A. Tính xác suất để ba số được chọn ra có tổng là một số chẵn.

B. Theo chương trình chuẩn.

Câu 6b (1.0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: 2x+y-2=0; d_2: x-2y+1=0$. Gọi A,B,C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13})$ xuống d_1, d_2 và trục Ox. Chứng minh rằng ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Câu 7b (1.0 điểm). Trong hệ trục Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$

Điểm M thuộc d_1 , điểm N thuộc d_2 sao cho khoảng cách MN là ngắn nhất. Viết phương trình mặt cầu đường kính MN.

Câu 8b (1.0 điểm). Cho $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$ chứng minh rằng $z^5 + z^6 + z^7 + z^8 = 0$.

Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tương đương với biểu điểm chấm.

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1	a (1 điểm)	<p>Với $m=-1$ thì: $y = \frac{x-1}{x+1}$ (C)</p> <p>1) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$</p> <p>2) Sự biến thiên.</p> <p>*) Tính đúng các giới hạn và chỉ ra đúng các đường tiệm cận:</p> <p>*) Tính đúng y' lập đúng bảng biến thiên và KL đúng về tính đơn điệu.</p> <p>3) Vẽ đúng đồ thị.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	b (1 điểm)	<p>Ta có: $A(-m;0)$ và $B(1; \frac{m+1}{2})$.</p> <p>Lại có: $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ nên $k = \frac{1}{1-m}; k_1 = \frac{1-m}{4}$</p> <p>Suy ra:</p> $ k + k_1 = \left \frac{1}{1-m} + \frac{1-m}{4} \right = \left \frac{1}{1-m} \right + \left \frac{1-m}{4} \right \text{ (do } \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1-m}{4} > 0)$ <p>Mà: $\left \frac{1}{1-m} \right + \left \frac{1-m}{4} \right \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2\sqrt{\left \frac{1}{1-m} \right \left \frac{1-m}{4} \right } = 1, \forall m \neq 1$</p> <p>Dấu “=” xảy ra: $\frac{1}{1-m} = \frac{1-m}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$</p> <p>Vậy $k + k_1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1, khi $m \in \{-1; 3\}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
2	a (1 điểm)	$2\cos(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 1 - 2\cos^2(\frac{3\pi}{4} - x)$ $\Leftrightarrow 2\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = -\cos(\frac{3\pi}{2} - 2x)$ $\Leftrightarrow 2\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin 2x$ $\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \cos x$ $\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	b (1 điểm)	<p>Giải hệ phương trình</p> $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5 \cdot 6^x + 4 \cdot 2^{3x-2y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 & (2) \end{cases}$ <p>Giải :</p>	

		<p>Điều kiện : $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$</p> <p>Khi đó:</p> <p>Xét pt(2): $\sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \quad (2)$</p> <p>$\Leftrightarrow \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x}) \quad (2)$</p> <p>*) Nếu $\sqrt{x-y} + \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ thay vào hệ pt thấy thỏa mãn :</p> <p>Vậy (0 ;0) là một nghiệm của hệ phương trình.</p> <p>*) Nếu $\sqrt{x-y} + \sqrt{y} \neq 0$ khi đó.</p> <p>$(2) \Leftrightarrow x - 2y = (2y-x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y})$</p> <p>$\Leftrightarrow (2y-x)[(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1] = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-x=0 \\ (\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$</p> <p>HPT trở thành :</p> <p>$\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ x=2y \end{cases} \quad (1)$</p> <p>Khi đó thay $x=2y$ vào pt (1)</p> <p>$\Leftrightarrow 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \quad (*) \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{3}{2})^x = 1 \\ (\frac{3}{2})^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (loại)} \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \Rightarrow y = \log_{\frac{3}{2}} 2 \end{cases}$</p> <p>Vậy hệ pt có 2 nghiệm : (0 ;0) và $(\log_{\frac{3}{2}} 4; \log_{\frac{3}{2}} 2)$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
3	1 điểm	<p>Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x \cdot \sqrt{x} + x}{(x+1) \cdot e^x} dx$</p> <p>Ta có : $I = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx}_{I_2}$</p> <p>*) Tính $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$</p> <p>Khi đó : $I_1 = (-xe^{-x}) \Big _0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - e^{-x} \Big _0^1 = 1 - \frac{2}{e}$.</p> <p>*) Tính $I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$</p> <p>Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$</p> <p>Đổi cận : với $x = 0$ thì $t = 0$. với $x = 1$ thì $t = 1$.</p> <p>Khi đó : $I_2 = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int_0^1 (2 - \frac{2}{t^2+1}) dt = 2t \Big _0^1 - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2 - 2I_3$</p> <p>*) Tính $I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$; Bằng cách đặt $t = \tan u$. Từ đó tính được</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

		$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 u \tan^2 u + 1} du = \frac{\pi}{4}$ <p>Kết quả : $I = 3 - \frac{2}{e} - \frac{\pi}{2}$</p>	
4	1 điểm	<p>Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 2012xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:</p> $A = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$ <hr/> <p>Chứng minh bổ đề: $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4; \forall x, y > 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) (*)$ Dấu '=' có khi x=y.</p> <p>Giả thiết: $xy + yz + zx = 2012xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2012$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) (1)$ <p>Hoàn toàn tương tự ta có :</p> $\frac{1}{x+2y+z} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right) (2) \text{ và } \frac{1}{x+y+2z} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) (3)$ <p>Cộng vế với vế (1); (2) và (3) ta nhận được :</p> $A = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{2012}{4} = 503$ <p>A lớn nhất = 503 đạt được khi x=y=z=3/2012</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
5	(1điểm)	<p>Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC = a\sqrt{3}, DA = DB = DC$. Biết rằng DBC là tam giác vuông và điểm E nằm trên DA thỏa mãn $\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$. Tính thể tích tứ diện EBCD theo a.</p> <hr/> <p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">B</p> <p>Ta có: $\frac{V_{EBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{DE}{DA} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{EBCD} = \frac{1}{3} V_{ABCD}$</p> <p>*) Tính V_{ABCD}</p>	0,25

		<p>Do $DA=DB=BC$ nên hình chiếu của D lên (ABC) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tức là trung điểm I của BC. Ta tính được $BC=2a$, từ tam giác DBC vuông cân tại D nên chiều cao $DI=1/2BC=a$. Khi đó :</p> $V_{DABC} = \frac{1}{3} DI.S_{ABC} = \frac{1}{6} .a.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{DEBC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18} (dvtt)$	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
6a	1 điểm	<p>Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;3)$; $B(-1;1)$; $C(3;0)$. Lập phương trình đường thẳng d biết d đi qua A và cùng với đường thẳng d' cũng đi qua A chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.</p> <p>-----</p> <p>Gọi M, N là các điểm thuộc cạnh BC sao cho AM, AN chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau. Khi đó ba tam giác ABM, AMN và ANC có cùng chiều cao xuất phát từ A nên. $BM=MN=NC$.</p> <p>Suy ra: $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BC}$; $\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC}$</p> <p>Lại có : $\overline{BC} = (4;-1)$; $\overline{BM} = (x_M+1; y_M-1)$; $\overline{BN} = (x_N+1; y_N-1)$</p> <p>Do vậy : $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BC} \Rightarrow M(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \Rightarrow AM : 7x-2y-1=0$</p> <p>$\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC} \Rightarrow N(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}) \Rightarrow AN : 4x+y-7=0$</p> <p>Kết luận : Phương trình cần tìm : $7x-2y-1=0$ và $4x+y-7=0$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
7a	1 điểm	<p>Trong hệ trục Oxyz cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và</p> $d_2 : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}$ <p>Viết phương trình mặt phẳng trung trực của MN biết rằng M thuộc d_1 còn N thuộc d_2 sao cho khoảng cách MN là ngắn nhất.</p> <p>-----</p> <p>Gọi $M(2t; 1-t; -2+t)$ thuộc d_1 còn $N(-1+2s; 1+s; 3)$ thuộc d_2</p> <p>Khi đó: $\overline{NM}(2t+1-2s; -t-s; t-5)$.</p> <p>MN ngắn nhất khi và chỉ khi MN là đường vuông góc chung của</p> <p>d_1 và d_2 khi đó : $\begin{cases} \overline{NM} \cdot \vec{u_1} = 0 \\ \overline{NM} \cdot \vec{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = s = 1$</p> <p>Vậy $M(2; 0; 1)$ và $N(1; 2; 3)$</p> <p>Mặt phẳng trung trực (P) của MN đi qua trung điểm $I(3/2; 1; 2)$ của MN và nhận $\overline{NM}(1; -2; -4)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có dạng :</p> <p>$2x-4y-8z+29=0$ (P)</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
8a	1 điểm	<p>Cho tập $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 7x \leq 0\}$ chọn ngẫu nhiên ra ba số từ tập A. Tính xác suất để ba số được chọn ra có tổng là một số chẵn.</p> <p>-----</p> <p>Ta có: $A = \{0; 1; 2; \dots; 7\}$</p> <p>Không gian mẫu: $\Omega = C_8^3$.</p> <p>$A =$ “Biến cố lấy ra 3 số có tổng là số chẵn”.</p> <p>Để 3 số lấy ra có tổng ba số là số chẵn thì hoặc cả ba số đều là số</p>	<p>0,25</p>

		<p>chẵn, hoặc 1 số chẵn và 2 số lẻ nên :</p> $ \Omega_A = C_4^3 + C_4^1 \cdot C_4^2$ <p>Khi đó xác suất là : $P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \cdot C_4^2}{C_8^3}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p>
6b	1 điểm	<p>Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: 2x+y-2=0$; $d_2: x-2y+1=0$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13})$ xuống d_1, d_2 và trục Ox. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.</p> <p>-----</p> <p>Giải.</p> <p>$A(a; 2-2a)$ thuộc d_1; $B(2b-1; b)$ thuộc d_2</p> <p>$\overrightarrow{MA}(a - \frac{5}{13}; \frac{38}{13} - 2a)$; $\overrightarrow{MB}(2b - \frac{18}{13}; b + \frac{12}{13})$</p> <p>Từ $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Rightarrow a = \frac{81}{65} \Rightarrow A(\frac{81}{65}; -\frac{32}{65})$</p> <p>$\overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow b = \frac{24}{65} \Rightarrow B(-\frac{17}{65}; \frac{24}{65})$</p> <p>Mặt khác : $C(\frac{5}{13}; 0)$ khi đó :</p> <p>$\overrightarrow{AC}(-\frac{56}{65}; \frac{32}{65})$; $\overrightarrow{BC}(\frac{42}{65}; -\frac{24}{65}) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$</p> <p>Vậy A, B, C thẳng hàng.</p>	
7b	1 điểm	Tương tự (7a). Tâm mặt cầu là I và bán kính MN/2	
8b	1 điểm	<p>Cho $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ chứng minh rằng $z^5 + z^6 + z^7 + z^8 = 0$.</p> <p>-----</p> <p>Ta có: $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^5 = \left(\frac{2i}{2}\right)^5 = i^5 = i$</p> <p>Do đó : $z^5 + z^6 + z^7 + z^8 = z^5(1+z+z^2+z^3) = (i)^5(1+i+i^2+i^3) = 0$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>